Scorevoorstel oefentoets vwo B deel 3

Hoofdstuk 12 Goniometrische formules

In deze toets zijn de vragen gelabeld met K, T of I.
K = kennisvraag, T = toepassingsvraag, I = inzichtvraag
De toets bestaat uit zeventien vragen met in totaal 73 punten.
Er is één K-vraag van 2 punten, twaalf T-vragen met in totaal 48 punten
en vier I-vragen met in totaal 23 punten.

K **OPGAVE 1** **TOTAAL 2P**

$f(a-p)+f(a+p)=2b$ 2p

OPGAVE 2 **TOTAAL 12P**

T **a** $\sin(3x)=-\cos(2x-\frac{1}{6}\pi)$ geeft $\sin(3x)=\cos(2x+\frac{5}{6}\pi)$ en dit geeft

$\sin(3x)=\sin(2x+1\frac{1}{3}\pi)$ 1p

$3x=2x+1\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x=\pi-(2x+1\frac{1}{3}\pi)+k\cdot 2\pi$ 1p

$x=1\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=-\frac{1}{15}\pi+k\cdot\frac{2}{5}\pi$ 1p

T **b** $9\sin^3(2x)=\sqrt{3}\cos^3(2x)$ geeft $\tan^3(2x)=\frac{1}{9}\sqrt{3}$ 1p

$\tan^3(2x)=3^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $\tan(2x)=3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 1p

$\tan(2x)=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ geeft $2x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\pi$, dus $x=\frac{1}{12}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$ 1p

T **c** $\cos^2(\frac{1}{4}\pi x)+3\sin(\frac{1}{4}\pi x)=2\frac{1}{4}$ geeft $1-\sin^2(\frac{1}{4}\pi x)+3\sin(\frac{1}{4}\pi x)=2\frac{1}{4}$ 1p

$\sin^2(\frac{1}{4}\pi x)-3\sin(\frac{1}{4}\pi x)+1\frac{1}{4}=0$ met $\sin(\frac{1}{4}\pi x)=u$ geeft $u^2-3u+1\frac{1}{4}=0$ 1p

$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 1\frac{1}{4}=4$, dus $u=\dfrac{3+2}{2}=2\frac{1}{2} \vee u=\dfrac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ 1p

$\sin(\frac{1}{4}\pi x)=\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{4}\pi x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{4}\pi x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ 1p

$x=\frac{2}{3}+k\cdot 8 \vee x=3\frac{1}{3}+k\cdot 8$ 1p

x in $[0, 10]$ geeft $x=\frac{2}{3} \vee x=8\frac{2}{3} \vee x=3\frac{1}{3}$ 1p

OPGAVE 3 **TOTAAL 9P**

T **a** $\sin(x+\frac{2}{3}\pi)=\sin(x)\cos(\frac{2}{3}\pi)+\cos(x)\sin(\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)$ 1p

$\cos(x-\frac{1}{6}\pi)=\cos(x)\cos(\frac{1}{6}\pi)+\sin(x)\sin(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$ 1p

$\sin(x+\frac{2}{3}\pi)+\cos(x-\frac{1}{6}\pi)=-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)=\sqrt{3}\cos(x)$ 1p

T **b** $4\cos^2(\frac{1}{2}x)=2+2\cos(x)$ 1p

$3\sin^2(\frac{1}{2}x)=1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}\cos(x)$ 1p

dus $4\cos^2(\frac{1}{2}x)-3\sin^2(\frac{1}{2}x)=2+2\cos(x)-(1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}\cos(x))=\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}\cos(x)$ 1p

T **c** $\cos(6x)=1-2\sin^2(3x)$ 1p

$\cos^2(3x)=1-\sin^2(3x)$ 1p

dus $y=1-2\sin^2(3x)+2-2\sin^2(3x)=3-4\sin^2(3x)$ 1p

OPGAVE 4 **TOTAAL 16P**

T **a** $f(\pi-p)=\sin^2(\pi-p)-\cos(\pi-p)-\frac{1}{4}=\sin^2(p)+\cos(p)-\frac{1}{4}$ 1p

$f(\pi+p)=\sin^2(\pi+p)-\cos(\pi+p)-\frac{1}{4}=(-\sin(p))^2+\cos(p)-\frac{1}{4}=\sin^2(p)+\cos(p)-\frac{1}{4}$ 1p

$f(\pi-p)=f(\pi+p)$, dus symmetrisch in de lijn $x=\pi$ 1p

T **b** $f(x)=\sin^2(x)-\cos(x)-\frac{1}{4}$ geeft $f'(x)=2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)$ 1p

$f'(x)=0$ geeft $\sin(x)(2\cos(x)+1)=0$, dus $\sin(x)=0\vee\cos(x)=-\frac{1}{2}$ 1p

$\sin(x)=0$ geeft $x=0\vee x=\pi\vee x=2\pi$, $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ geeft $x=\frac{2}{3}\pi\vee x=1\frac{1}{3}\pi$ 1p

min. is $f(0)=-1\frac{1}{4}$, max. is $f(\frac{2}{3}\pi)=1$, min. is $f(\pi)=\frac{3}{4}$, max. is $f(1\frac{1}{3}\pi)=1$

en min. is $f(2\pi)=-1\frac{1}{4}$, dus $B_f=[-1\frac{1}{4},1]$ 2p

I **c** $f(x)=0$ geeft $\sin^2(x)-\cos(x)-\frac{1}{4}=0$ oftewel $1-\cos^2(x)-\cos(x)-\frac{1}{4}=0$ 1p

$\cos^2(x)+\cos(x)-\frac{3}{4}=0$ met $\cos(x)=u$ geeft $u^2+u-\frac{3}{4}=0$ 1p

$D=1^2-4\cdot1\cdot-\frac{3}{4}=4$, dus $u=\dfrac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}\vee u=\dfrac{-1-2}{2}=-1\frac{1}{2}$ 1p

$\cos(x)=\frac{1}{2}$ en x in $[0,2\pi]$ geeft $x=\frac{1}{3}\pi\vee x=1\frac{2}{3}\pi$ 1p

$O(V)=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi}(\sin^2(x)-\cos(x)-\tfrac{1}{4})\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)-\cos(x)-\tfrac{1}{4})\mathrm{d}x$ 1p

$O(V)=\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin(2x)-\sin(x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi}$ 1p

$O(V)=\frac{5}{12}\pi-\frac{1}{4}\cdot-\frac{1}{2}\sqrt{3}--\frac{1}{2}\sqrt{3}-(\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ 1p

$O(V)=\frac{1}{3}\pi+1\frac{1}{4}\sqrt{3}$ 1p

OPGAVE 5 **TOTAAL 10P**

T **a** $AB^2=(2\cos(2t)-3\cos(3t))^2+(2\sin(2t)-3\sin(3t))^2$ 1p

$AB^2=4\cos^2(2t)-12\cos(2t)\cos(3t)+9\cos^2(3t)+4\sin^2(2t)-12\sin(2t)\sin(3t)+9\sin^2(3t)$ 1p

$AB^2=4+9-12(\cos(2t)\cos(3t)+\sin(2t)\sin(3t))$ 1p

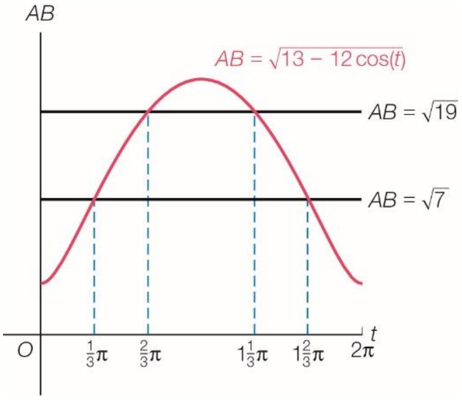
$AB^2=13-12\cos(2t-3t)=13-12\cos(-t)=13-12\cos(t)$, dus $AB=\sqrt{13-12\cos(t)}$ 1p

T **b** $\sqrt{13-12\cos(t)}=\sqrt{7}$ geeft $13-12\cos(t)=7$, dus $\cos(t)=\frac{1}{2}$ 1p

$t=\frac{1}{3}\pi+k\cdot2\pi\vee t=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot2\pi$ en t in $[0,2\pi]$ geeft $t=\frac{1}{3}\pi\vee t=1\frac{2}{3}\pi$ 1p

$\sqrt{13-12\cos(t)}=\sqrt{19}$ geeft $13-12\cos(t)=19$, dus $\cos(t)=-\frac{1}{2}$ 1p

$t=\frac{2}{3}\pi+k\cdot2\pi\vee t=-\frac{2}{3}\pi+k\cdot2\pi$ en t in $[0,2\pi]$ geeft $t=\frac{2}{3}\pi\vee t=1\frac{1}{3}\pi$ 1p



1p

$\sqrt{7}<AB<\sqrt{19}$ geeft $\frac{1}{3}\pi<t<\frac{2}{3}\pi\vee1\frac{1}{3}\pi<t<1\frac{2}{3}\pi$ 1p

OPGAVE 6 **TOTAAL 15P**

T **a** $2\cos(3t-\frac{1}{4}\pi)=-\sqrt{3}$ geeft $\cos(3t-\frac{1}{4}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus

$3t-\frac{1}{4}\pi=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3t-\frac{1}{4}\pi=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ 1p

$3t=\frac{13}{12}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3t=-\frac{7}{12}\pi+k\cdot 2\pi$ geeft $t=\frac{13}{36}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee t=-\frac{7}{36}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ 1p

t in $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ geeft $t=-\frac{7}{36}\pi \vee t=-\frac{11}{36}\pi$ 1p

dus P doet er $\frac{4}{36}\pi=\frac{1}{9}\pi$ seconden over 1p

I **b** $2\sin(4t)=0$ geeft $\sin(4t)=0$, dus $4t=k\cdot\pi$ en dus $t=k\cdot\frac{1}{4}\pi$ 1p

$t=-\frac{1}{2}\pi$ en $t=0$ geven $y=\sqrt{2}$, dus voor $t=-\frac{1}{2}\pi$ en $t=0$ door $C(0,\sqrt{2})$ 1p

$x(t)=2\sin(4t)$ geeft $x'(t)=8\cos(4t)$ en

$y(t)=2\cos(3t-\frac{1}{4}\pi)$ geeft $y'(t)=-6\sin(3t-\frac{1}{4}\pi)$ 1p

$\vec{v}(-\frac{1}{2}\pi)=\begin{pmatrix}x'(-\frac{1}{2}\pi)\\ y'(-\frac{1}{2}\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -3\sqrt{2}\end{pmatrix}$ en $\vec{v}(0)=\begin{pmatrix}x'(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 1p

$$\cos(\varphi)=\frac{\left|\begin{pmatrix}8\\ -3\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}8\\ -3\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}8\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|}=\frac{|64-18|}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{82}}=\frac{46}{82}=\frac{23}{41}$$ 1p

$\varphi\approx 55{,}9°$ 1p

T **c** $2\cos(3t-\frac{1}{4}\pi)=0$ geeft $\cos(3t-\frac{1}{4}\pi)=0$, dus $3t-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$ 1p

$3t=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$ geeft $t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{3}\pi$ en t in $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ geeft

$t=-\frac{3}{4}\pi \vee t=-\frac{5}{12}\pi \vee t=-\frac{1}{12}\pi \vee t=\frac{1}{4}\pi$ 1p

$t=-\frac{5}{12}\pi$ geeft $x=\sqrt{3}$, dus voor $t=-\frac{5}{12}\pi$ door $(\sqrt{3}, 0)$ 1p

de baansnelheid in $(\sqrt{3}, 0)$ is

$v(-\frac{5}{12}\pi)=\sqrt{(8\cos(-1\frac{2}{3}\pi))^2+(-6\sin(-1\frac{1}{2}\pi))^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ 2p

OPGAVE 7 **TOTAAL 9P**

I **a** $\vec{m}=\vec{q}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}_L$ 1p

$\overrightarrow{QP}=\vec{p}-\vec{q}=\begin{pmatrix}2\sin(t)+2\\ 3\cos(2t)+3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin(t)+1\\ 3\cos(2t)+1\end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{QP}_L=\begin{pmatrix}-3\cos(2t)-1\\ 2\sin(t)+1\end{pmatrix}$ 2p

$\vec{m}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\sin(t)+1\\ 3\cos(2t)+1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\cos(2t)-1\\ 2\sin(t)+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t)-1\frac{1}{2}\cos(2t)+1\\ \sin(t)+1\frac{1}{2}\cos(2t)+3\end{pmatrix}$ en dit geeft de

bewegingsvergelijkingen van M 1p

I **b** $y_P=0$ geeft $3\cos(2t)+3=0$, dus $\cos(2t)=-1$ en dit geeft

$2t=\pi+k\cdot 2\pi$ oftewel $t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$ 1p

$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft $x_P=2\cdot 1+2=4$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x_P=2\cdot -1+2=0$ 1p

bij $t=1\frac{1}{2}\pi$ hoort $O(0,0)$, dus bij $t=1\frac{1}{2}\pi$ hoort het punt B

bij $t=\frac{1}{2}\pi$ hoort $A(4,0)$, dus bij $t=\frac{1}{2}\pi$ hoort het punt C 1p

$t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x_M=\sin(1\frac{1}{2}\pi)-1\frac{1}{2}\cos(3\pi)+1=-1+1\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$ en

$y_M=\sin(1\frac{1}{2}\pi)+1\frac{1}{2}\cos(3\pi)+3=-1-1\frac{1}{2}+3=\frac{1}{2}$, dus $B(1\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 1p

$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft $x_M=\sin(\frac{1}{2}\pi)-1\frac{1}{2}\cos(\pi)+1=1+1\frac{1}{2}+1=3\frac{1}{2}$ en

$y_M=\sin(\frac{1}{2}\pi)+1\frac{1}{2}\cos(\pi)+3=1-1\frac{1}{2}+3=2\frac{1}{2}$, dus $C(3\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$ 1p